

## Олимпиада «Росатом» по математике

## 11 класс, 2024 год, комплект 1

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 400 м и 600 м соответственно. Квадраты имеют общую вершину  $A$  и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки  $A$  и бежали 2 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько метров дистанции ребята бежали рядом друг с другом?

2000 метров

2. Пары чисел  $(x; y)$  связаны соотношениями

$$\frac{\sin x}{1 + \sin y - \sin x} = \frac{\sin y}{1 + \sin x - \sin y} = \frac{1}{\sin x + \sin y - 1}.$$

Найдите наименьшее возможное значение величины  $\sin^2 x - \frac{1}{6} \cos 2y$ .

1/12

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке  $[41; 80]$ .

0091

4. На плоскости нарисовано 100 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной — на гиперболе  $y = \frac{2x+3}{x}$  в точках с абсциссой  $x = n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, 100$  со сторонами параллельными координатным осям. Область  $D$  содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найдите площадь  $D$ .

5

5. Найдите коэффициент  $a_{2024}$  многочлена  $P(x) = (1 + x^{125} + x^{131})^{18}$ , если бы он был приведён в форму суммы одночленов вида  $a_k x^k$ ,  $k = 0, 2, 3, \dots, 2358$ .

 $a_{2024} = C_{18}^{14} \cdot C_{12}^{14} = 278460$ 

6. Точка  $O$  — начало трех отрезков  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  лежащих в плоскости  $P$  и имеющих длины 1, 2 и 3 соответственно. На прямой  $L$ , проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной плоскости  $P$ , расположена точка  $D$  так, что сумма углов, образуемых прямыми  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  с прямой  $L$ , равна  $180^\circ$ . Найдите длину отрезка  $OD$ .

1