

## Олимпиада «Росатом» по математике

## 11 класс, 2021 год, комплект 4

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону  $v(t) = A|\sin(at)|, t \geq 0$  с некоторыми константами  $A > 0$  и  $0 < a < 0,2$ . Известно, что за каждые 20 сек. точка проходит путь 2 м. Какой путь пройдет тело спустя 65 сек. после начала движения?

$\frac{2}{\sqrt{3}} - 2$

2. Доказать, что число  $x_1 = -\sin \frac{\pi}{18}$  является корнем кубического уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Найти два других его корня.

$\frac{81}{27} \text{ и } \frac{81}{27} \text{ и } -$

3. При каких целых числах  $b$  и  $c$  выражение

$$\sqrt{4x^2 + bx + c}$$

целое при любых целых  $x$ ?

$\mathbb{Z} \ni a, c = k^2, k \in \mathbb{Z}$

4. В колоде 10 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 10. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 5?

900'0

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 1 и  $\sqrt{3}$ . Пусть  $A$  — одна из точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равнобедренных треугольников с вершиной в точке  $A$  и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь  $39\sqrt{3}$ ?

Минимально возможная площадь равна  $\sqrt{3}$ , число равнобедренных треугольников с площадью  $39\sqrt{3}$  равно 12

6. Около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность. Длины сторон  $AB$  и  $AD$  равны. На стороне  $CD$  расположена точка  $Q$  так, что  $DQ = 1$ , а на стороне  $BC$  — точка  $P$  так, что  $BP = 2$ . При этом  $\angle DAB = 2\angle QAP$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

3