

## Олимпиада «Росатом» по математике

### 11 класс, 2021 год, комплект 3

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при  $x = 3$ ?» Петя ответил «49». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при  $x = 49$ ?» был получен ответ «122455». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

$$f + x^2 + x = (x)^d$$

2. Решить уравнение

$$(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})(\cos 2x + \sqrt{1 + \cos^2 2x}) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni y, \frac{8}{4yz} + \frac{9}{y} = x$$

3. Найти наибольшее значение выражения

$$F = \frac{(5n - 18)\text{НОД}(n + 9, n + 2)}{\text{НОК}(n + 9, n + 2)}$$

на множестве натуральных чисел. При каком  $n$  оно достигается?

$$\text{Максимальное значение равно } 7 \text{ и достигается при } n = 12$$

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 6 единиц?

$$0.080$$

5. Доказать, что уравнение

$$x^3 - 6x = a^3 + \frac{8}{a^3}$$

не может иметь трех действительных решений ни при каких  $a$ .

При каких  $a$  уравнение имеет два различных решения? Найти эти решения.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = a^2 \\ x^2 - 2x + 1 = a^2 \end{cases}$$

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом  $45^\circ$ . В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре — на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

$$\frac{8(\sqrt{2} + 1)}{9\sqrt{2}}$$