

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2021 год, комплект 2

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n — его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

$z = u$

2. При каких целых n функция

$$f(x) = \sin nx \cdot \cos \frac{7x}{n^2}$$

имеет период $T = 9\pi$?

$z = u$

3. Представить число 2021 в виде суммы трех взаимно простых чисел.

Например, $2021 = 499 + 609 + 913$

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 10 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

Не меньше 11

5. При каких α система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4 \cos \alpha)^2 + (y - 4 \sin \alpha)^2 = 1, \\ (x - 5 \cos 2\alpha)^2 + (y - 5 \sin 2\alpha)^2 = 9 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

$\alpha = \pm \arccos \frac{37}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\alpha = \pm \arccos \frac{40}{37} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD .

$\frac{2}{3}$