

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2020 год, комплект 1

1. Найти целые числа x и y , для которых

$$\log_2 \left(\frac{x}{17} + \frac{y}{5} \right) = \log_2 \frac{x}{17} + \log_2 \frac{y}{5}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 9 = n \\ 10 = n \\ 22 = n \\ 34 = x \\ 22 = x \\ 102 = x \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} 01 = n \\ 22 = n \\ 34 = x \\ 22 = x \\ 102 = x \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} 06 = n \\ 18 = x \end{array} \right\}$$

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin(nx) \cdot \cos \frac{6x}{n+1}$ имеет период $T = 5\pi$?

$$\{67; 41; 9; 5; 2; 4; 1; 2; 0; -2; -3; -4; -6; -7; -11; -16; -18; -31\} \ni n$$

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$, для которых

$$2 \cdot \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{2019}) = a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}.$$

4. Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

$$\frac{328}{65}$$

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot \sin a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $2 \cos^2 a_n = \cos a_{n+1}$.

$$(3) \quad a_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; d = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

$$(2) \quad a_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; d = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

$$(1) \quad a_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; d = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 3 и 4 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 30° .

$$5\sqrt{5}$$