Олимпиада «Росатом» по математике

10 класс, 2020 год, комплект 1

1. При каких a

1. уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;
2. уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений

для функций вида

$$f(x) = \frac{ax-5}{x+a-2}?$$

1) $a = 1$, $f(x) = \frac{x-5}{x-1}$; 2) $a = 1$, $f(x) = \frac{x-5}{x-1}$; $a = -1$, $f(x) = \frac{-x-5}{x-3}$; $a = 3$, $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$

2. Каждое из четырех чисел $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 2 является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x + \sin y$, $\sin x - \sin y$, $\sin x \cdot \sin y$, $\sin x : \sin y$ над числами $\sin x$, $\sin y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $l \in \mathbb{Z}$, $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. При каких a решение (x, y, z) системы

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ 2y + 3z = a + 1, \\ x + 3z = 5 \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 19$? Найти эти решения.

1) при $a = 4$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$; 2) при $a = -8$, $x = 2$, $y = -5$, $z = 1$

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2020, для которого $P(5) = 2019$, $P(6) = 2021$ и $P(4 + x) = P(8 - x)$ для всех x.

5. Точки M, N, P — основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45°$, $60°$, $75°$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$