

## Олимпиада «Росатом» по математике

## 11 класс, 2019 год, комплект 2

1. На проволоку в форме окружности радиуса 6 нанизаны 5 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 4 бусинки начали двигаться со скоростью  $\pi/2$  (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка — с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 48 сек.?

2. На плоскости расположено множество параллелограммов, для которых

1) координаты  $(x; y)$  их вершин являются решениями системы

$$\begin{cases} \sin(x + y) = \cos(2x - y), \\ \cos(x - y) = \sin(x + 2y); \end{cases}$$

2) координаты  $(x; y)$  граничных точек являются решениями объединения

$$\begin{cases} \sin(x + y) = \cos(2x - y), \\ \cos(x - y) = \sin(x + 2y). \end{cases}$$

Найти наименьшее возможное значение площади таких параллелограммов.

3. Известно, что дробь  $\frac{m(n+69m)}{n(m+69n)}$  сократима для некоторых взаимно простых целых чисел  $m$  и  $n$ . Найти наибольшее простое число  $d$ , на которое делится числитель и знаменатель дроби.

4. На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  совершенно случайно взяты точки  $M$  и  $N$ . Найти вероятность того, что площадь треугольника  $BMN$  окажется не больше половины площади треугольника  $ABC$ .

5. При каких значениях  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(4x + 3y - 25) = 0, \\ (x - 6 \cos a)^2 + (y - 6 \sin a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A' B' C' D'$  называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки. По поверхности параллелепипеда с размерами  $AB = 2$ ,  $AD = 2\sqrt{2}$ ,  $AA' = 4$  ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной  $A$  всегда постоянное и равно  $2\sqrt{2}$ . Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.