

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2019 год, комплект 1

1. Сколько различных пар целых чисел x и y , $1 \leq x \leq 100$, $1 \leq y \leq 100$ удовлетворяют уравнению $\text{НОД}(\log_2 x, 36) = \log_3^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения

$$|\cos(x - 2y)| = -|\cos(x + y)|.$$

Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 3.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O , отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L , разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

5. При каких a множество решений неравенства $x^2 + (|y| - a)^2 \leq a^2$ содержит все пары чисел $(x; y)$, для которых $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 5 и 6, можно описать окружность с центром в точке O . Найти площадь четырехугольника $ABCO$