

## Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2015 год

1. Найти наибольшее значение выражения  $x - 2y$  для  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению  $4x^2 + 9y^2 = 25$ .

2. Найти все решения  $(x; y)$  уравнения  $(2 \sin(x + y) + 3)(\cos(2x - y) - 1) = -10$ , лежащие на прямой  $6x + 5y = 15\pi$ .

3. Найти зависимость от  $n$  числа целых неотрицательных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

при  $m = 2$  и  $m = 3$ . При каком  $n$  число решений для  $m = 3$  будет в четыре раза большим, чем число решений для  $m = 2$ ?

4. В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых — 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

5. Для всех целых  $k < 0$  найти целые решения  $x$  и  $y$  системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - ky^2 = 0, \\ x^2 - xy + ky^2 = 0. \end{cases}$$

6. Волк окружен собаками, расположенными в точках  $M, N, P$  и  $Q$  на сторонах квадрата  $ABCD$ ,  $M \in [A; B]$ ,  $N \in [B; C]$ ,  $P \in [C; D]$ ,  $Q \in [D; A]$  так, что  $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = 1 : 3$ . Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых  $MP$  и  $NQ$ , может бежать со скоростью  $v_w$  по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей  $v_c$ . Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения  $v_c/v_w$  волк имеет шанс спастись?