

## Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2025/26 год, онлайн-этап, вариант 1

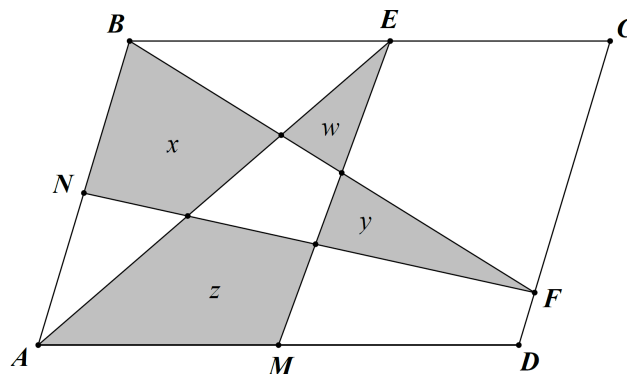
1. Произведение двух натуральных чисел  $A$  и  $B$  — это четырёхзначное число, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая совпадает с четвёртой. Какое наибольшее произведение могут иметь числа  $A$  и  $B$ , если известно, что  $A + B$  меньше 195?

8986

2. Миша выписал на доску 7 подряд идущих натуральных чисел и сложил их. Оказалось, что эта сумма заканчивается на 1230123. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных на доске?

988188

3. На сторонах  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $E$  и  $F$ , а на сторонах  $AD$  и  $AB$  — их середины  $M$  и  $N$  соответственно. Петя соединил некоторые из точек и закрасил четыре из полученных многоугольников, как показано на рисунке, после чего на двух из них написал их площади  $y$  и  $z$ , а две другие неизвестные отметил  $x$  и  $w$ . Найдите наименьшее возможное значение разности площадей  $x - w$ .



$f_1 - z$

4. Найдите наименьшее положительное значение константы  $C$  такое, что при любых  $a$  и  $b$  выполняется неравенство

$$C + a^2 + b^2 \geq ab + a + b.$$

1

5. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 8$ ,  $BC = 6$ , вписана в окружность. Хорда  $EF$  окружности, содержащая среднюю линию трапеции, имеет длину  $3\sqrt{11}$ . Какую длину имеет хорда  $PQ$ , параллельная  $EF$ , проходящая через точку  $S$  на стороне  $AB$  такую, что  $AS : BS = 4 : 3$ ? В ответ напишите квадрат искомой величины.

96

6. В окружность вписан правильный 24000-угольник  $A_1A_2 \dots A_{24000}$ . Вася начинает движение из точки  $A_1$  и обходит окружность в направлении увеличения номеров вершин несколько раз. В процессе обхода он вычёркивает эти вершины: во время первого обхода вычёркиваются все  $A_k$  с чётными номерами, во время второго — все те из оставшихся, номера которых делятся на три, на третий обход вычёркиваются те вершины, номера которых делятся на три, на третий обход вычёркиваются те вершины, номера которых делятся на четыре и так далее. Найдите номер вершины, которую Вася вычеркнет 16003-ей.

38

7. Треугольник  $XYZ$  равнобедренный ( $\angle XYZ = \angle XZY = 35^\circ$ ). Внутри угла  $XYZ$ , но вне треугольника  $XYZ$  взята точка  $P$  так, что  $\angle XPY = 22^\circ$ , а  $\angle ZPY = 55^\circ$ . Найдите  $\angle PYX$ . Ответ дайте в градусах.

27

8. У фокусника есть два набора по 40 карточек. На карточках каждого набора написаны различные натуральные числа от 1 до 40 (по одному числу на карточке). Фокусник перемешал карточки в каждом из наборов. После чего карточки первого набора он положил сверху на карточки второго набора. Затем он посчитал количество карточек, расположенных между парами карточек с одинаковыми числами и сложил полученные 40 чисел. Какую наименьшую сумму он мог получить?

1560

9. Рассматривают все непустые подмножества множества  $\{1; 2; \dots; 150\}$ . Для каждого из них среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Найдите среднее арифметическое всех этих средних арифметических.

75,5

10. Вова задумал многочлен  $Q(x)$  с целыми коэффициентами. Оказалось, что

$$Q(11) = Q(25) = 450.$$

Какое наименьшее значение может принимать его свободный член  $c$ , если  $|c| < 150$ ?

001-