

**Олимпиада «Физтех» по математике****11 класс, 2025/26 год, онлайн-этап, вариант 3**

1. Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равного радиуса 10 пересекаются в точках  $B$  и  $C$ . На окружности  $\omega_1$  выбрана точка  $A$ , которая не лежит внутри  $\omega_2$ . Луч  $AB$  пересекает  $\omega_2$  в точке  $D$ , причём  $B$  лежит на отрезке  $AD$ . Точка  $E$  симметрична точке  $D$  относительно точки  $C$ . Найдите  $AE$ , если  $AD = 25$ ,  $BC = 15$ . Ответ округлите до двух знаков после запятой.

28,35

2. Маша и Саша играют в следующую игру. Несколько раз бросается симметричный кубик. Его грани пронумерованы натуральными числами от 1 до 6, а выпадение любой грани равновероятно. Маша побеждает при выпадении подряд двух шестёрок, а Саша — при выпадении подряд двух нечётных цифр. Какова вероятность того, что Маша победила, если известно, что игра закончилась за четыре хода? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

0,121

3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{4x+4} = \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+7}.$$

В ответе укажите сумму найденных корней.

2,0

4. В турнире у волейбольной команды было 10 побед и 6 поражений, причём все её победы были получены тремя «сериями» (серия — это одна или несколько последовательных побед, между которыми не было ни одного поражения). Сколькими способами это могло случиться? Под способом понимается последовательность побед и поражений. Ничьих в волейболе не бывает.

1260

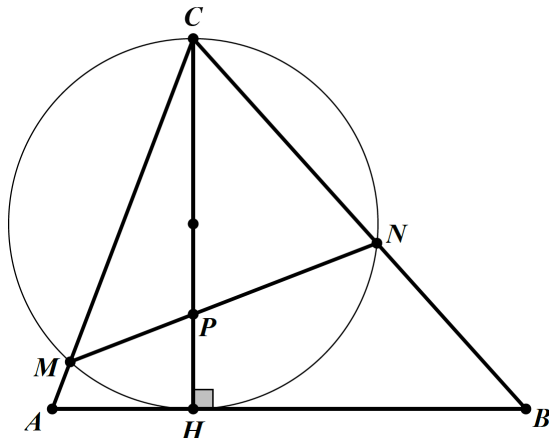
5. Найдите все положительные числа  $x$  такие, что оба числа  $x + \frac{1}{x}$  и  $x^2 - 4x$  являются целыми. В ответ запишите наибольшее из них, вычисленное с точностью до двух знаков после запятой.

3,73

6. Сколько существует таких прямоугольных треугольников  $ABC$ , что в них высота  $CD$ , проведённая из вершины прямого угла, связана с гипотенузой  $AB$  соотношением  $2DC + 2 = AB$ , отрезки  $CD$ ,  $AD$  и  $BD$  имеют целочисленные длины, а длина гипотенузы  $AB$  лежит в промежутке  $[10; 1000]$ ?

15

7. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CH$ , а затем на отрезке  $CH$  как на диаметре построена окружность. Точки  $M, N$  и  $P$  отмечены, как показано на рисунке. Найдите отношение  $BH : CH$ , если  $(MP \cdot NP) : CP^2 = 0,75$  и  $AH : CH = 0,5$ .

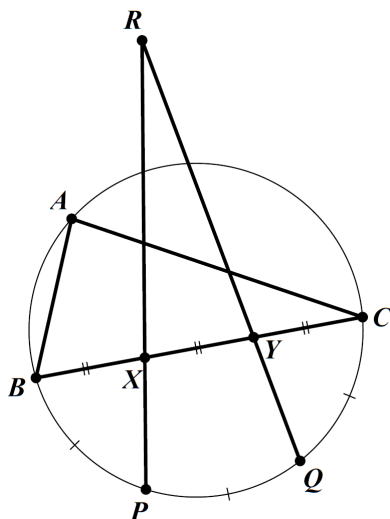


91

8. Имеется 2600 наборов по 50 карточек. На каждой карточке написано натуральное число, причём в каждом наборе все числа, написанные на карточках, различны. Оказалось, что какие бы два набора ни взяли, на 100 карточках этих наборов будет написано ровно 99 различных натуральных чисел. Какое наименьшее количество различных натуральных чисел может быть написано на всех карточках этих 2600 наборов?

127401

9. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $X$  и  $Y$ , а на меньшей дуге  $BC$  его описанной окружности отмечены точки  $P$  и  $Q$  так, что указанные на чертеже штрихами дуги и отрезки равны. Лучи  $PX$  и  $QY$  пересекаются в точке  $R$ . Найдите угол  $BAC$ , если угол  $BRC$  равен  $\alpha$ .



38

10. Найдите количество пар  $(x; y)$  таких, что  $x, y \in \mathbb{Z}$  и

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{2\pi x + \pi y}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi y}{12}\right), \\ |2x + y - 45| + |y| \leq 45. \end{cases}$$

140