

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2025/26 год, онлайн-этап, вариант 2

1. Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos \alpha$ и $x_2 = \sin \alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b , если $a + 2c = \frac{9}{a}$?

8-

2. Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = \sqrt{3}$, $AC = 4$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC , затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC , а затем C вдоль прямой параллельной (новой) прямой AB . Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C' = 120^\circ$, а $A'B' = 5$. Найдите $B'C'$.

91

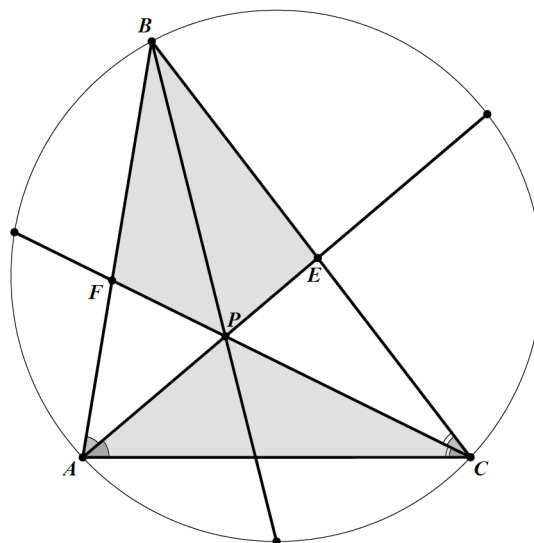
3. Найдите минимальное значение параметра a , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 3 - 4a \geq 0, \\ x - 2(a - 1)y - 4 \leq 0, \\ ax - x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

9'0

4. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R , а P — точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырёхугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \beta$.

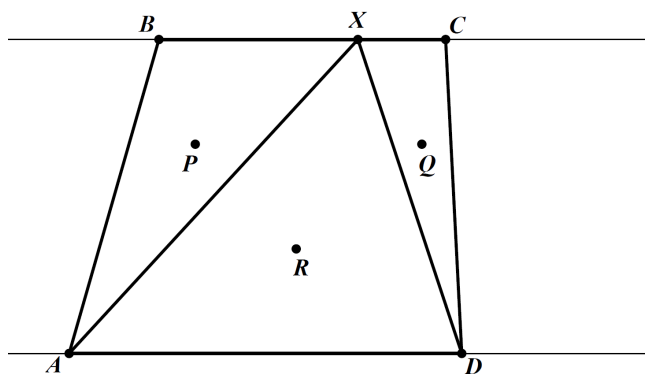


4R^2 \sin^2 \beta

5. Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трёхзначное, b — четырёхзначное, а их произведение делится 35.

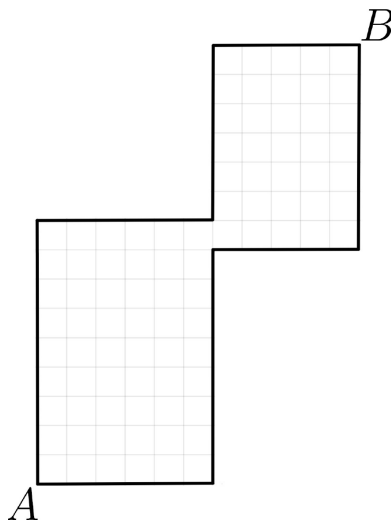
774470

6. На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X , как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = x$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AXD . Петя вычислил площадь треугольника PQR : она оказалась равна S . Найдите площадь треугольника AXD .



$\frac{x+1}{56}$

7. Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



3303300

8. Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых верно равенство

$$\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 3x^2 + x + 5y = 10^{1001}.$$

400

9. Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 9 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?

02

10. Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство

$$(\sqrt{3} - f(x)) f(x + k) = \sqrt{3}f(x) + 1.$$

При каком наибольшем целом значении m из интервала $(30; 50)$ можно утверждать, что

$$f(x + mk) = f(x)$$

при всех действительных x ?

48