

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 11 класс, 2025/26 год, онлайн-этап, вариант 1

1. Пару взаимно простых натуральных чисел  $a$  и  $b$  назовём забавной, если  $|a - b| < 5$ . Найдите количество забавных пар чисел  $(x, y)$  таких, что  $60 \leq x < y \leq 160$ .

792

2. Вася написал на доске выражение  $31 + 32 + 33 + \dots + 100$ , после чего стёр из него несколько слагаемых (при необходимости вместе с идущими перед ними знаками). Значение получившегося после вычёркивания чисел выражения оказалось равно 4489. Сколькими способами Вася мог стереть числа с доски?

61

3. В остроугольном треугольнике  $a, b, c$  — длины сторон, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — соответственно противолежащие им углы. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$a(b^2 + c^2) \cos(\alpha) + b(c^2 + a^2) \cos(\beta) + c(a^2 + b^2) \cos(\gamma),$$

если известно, что  $abc = 2$ ?

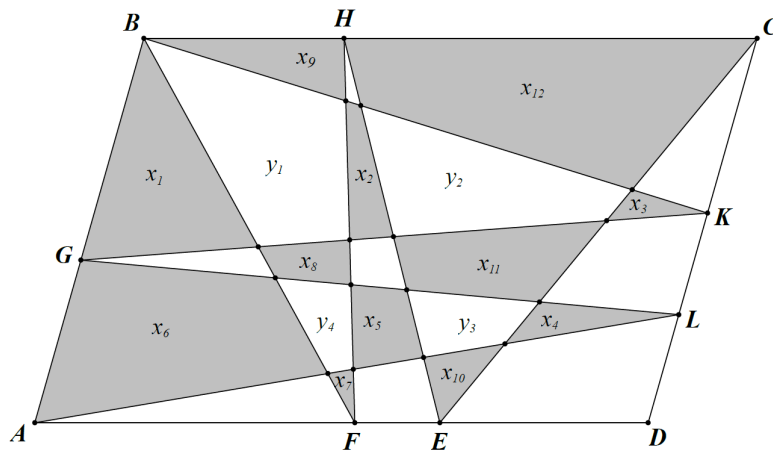
9

4. Вычислите площадь множества точек, координаты которых  $(x; y)$  удовлетворяют неравенству

$$|x - 1| + |x + 1| + 2|y| \leq 8.$$

08

5. На сторонах параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $E, F, G, H, K$  и  $L$ , как показано на рисунке. Петя соединил некоторые из точек отрезками и раскрасил полученные многоугольники в шахматном порядке. После этого он написал на всех закрашенных многоугольниках, кроме одного, их площади  $x_1, \dots, x_{11}$ . Найдите оставшуюся площадь  $x_{12}$ .



$$(11x + 10x + 6x + 8x + 4x) - 9x + 9x + 7x + 8x + 7x + 1x$$

6. Найдите наибольшее натуральное  $k$  такое, что число  $6400^{2001} - 16^{4002}$  делится на  $4^k$ .

9008

7. В окружности  $\omega$  проведены три хорды  $AB, AC$  и  $AD$  так, что углы  $\angle BAC$  и  $\angle DAC$  равны между собой. Найдите хорду  $BD$ , если  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AC = 3$ ,  $AD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ . Ответ округлите до третьего знака после запятой.

9.309

8. Петя записал на доске множество  $A$  всех натуральных чисел от 1 до 100. Затем Вася для всех непустых подмножеств множества  $A$  нашёл средние арифметические входящих в них чисел, после чего сообщил Пете число  $x$  — среднее арифметическое всех найденных средних арифметических. Затем Петя заменил в своём множестве  $A$  число 10 на число 1000, а Вася пересчитал ту же величину  $x$  для нового множества. На сколько увеличилось значение  $x$ ?

6.6

9. В пирамиду  $SABC$  вписан прямой круговой цилиндр так, что одно основание (с центром  $O$ ) лежит в треугольнике  $ABC$ , а другое касается граней  $SAB, SAC$  и  $SBC$ . Высота пирамиды  $SH$  вдвое больше высоты цилиндра. Пусть  $M$  — геометрическое место точек  $H$ , а  $N$  — геометрическое место точек  $O$ . Найдите площадь  $M$ , если площадь  $N$  равна  $S$ .

57

10. Вася задал последовательность  $x_n$  следующим образом:  $x_0 = 2$ , а для любого натурального  $n$

$$x_n = (n^4 - 2n^2 + 2) \left( \frac{x_{n-1}}{n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 1} + 2 \right).$$

Чему равно значение  $x_{100}$ ?

20095980402