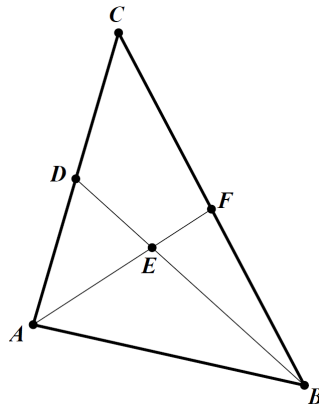


Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2025/26 год, онлайн-этап, вариант 2

1. В треугольнике на приведённом чертеже площади $\triangle ADE$ и $\triangle BFE$ равны 4, а площадь $\triangle FDE$ равна 2. Найдите площадь $\triangle CDF$.



9

2. Петя распределяет сумму 63000 рублей по трём инвестиционным проектам: в первом и втором указана доходность 3% и 5% годовых, а в третьем 6% годовых соответственно. Известно, что только один из проектов принесёт указанную доходность, а два других лишь вернут изначально вложенную сумму. Известно также, что Петя распределил деньги таким образом, чтобы его гарантированный доход (тот, что он получит в наихудшем случае) был как можно большим. Какую сумму он при этом вложил в первый проект?

0000€

3. AZ и CX — биссектрисы треугольника ABC , а Y — их точка пересечения. Найдите длину стороны AC этого треугольника, если $\angle ABY = \alpha$, площадь треугольника ABC равна S , а площади треугольников ABZ и ACX равны.

$$\sqrt{\frac{2S \sin(2\alpha)}{S}}$$

4. Найдите минимальное значение параметра a , при котором множество решений уравнения $(2a - 7)x - y - 6a + 21 = 0$ имеет ровно одну общую точку с множеством решений системы

$$\begin{cases} ax - y - 3a + 4 \leq 0, \\ ax + 2y - 8 \geq 0. \end{cases}$$

€

5. Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трёхзначное, b — четырёхзначное, а их произведение делится на 9.

000001Z

6. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника ABH , касается прямой AC . Найдите косинус угла BCA , если $AH = 1$, $AB = 3\sqrt{11}$.

1.0

7. Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых верно равенство

$$\sqrt[4]{10^x} + x^2 + x + 5y = 10^{2101}.$$

848

8. На занятии по физкультуре учитель расставил n школьников в шеренгу в случайном порядке (любой порядок равновероятен), а затем попросил старосту вычислить количество пар школьников, в которых стоящий справа ниже, чем стоящий слева (между школьниками в паре могут стоять и другие школьники). Какова вероятность, что староста получил число $C_n^2 - 2$? Известно, что все школьники в классе разного роста.

$\frac{n}{2} + C_{n-1}^2$

9. Имеется палитра из нескольких различных оттенков цветов. Известно, что все оттенки из неё кроме сиреневого сочетаются с разными количеством других оттенков палитры (включая сиреневый), а сиреневый сочетается ровно 13-ю. Какое наименьшее количество оттенков может быть в такой палитре?

97

10. Рассматриваются многочлены вида

$$P(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + 128$$

с неотрицательными коэффициентами $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, имеющие по семь действительных корней (не обязательно различных). Какое наименьшее значение может иметь $P(8)$?

101