

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2025/26 год, онлайн-этап, вариант 1

1. Найдите количество целых значений параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (7a + 2)x + (a - 1) = 0$$

имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 2.

4

2. Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $300^{2700} - 3^{2700}$ делится на 3^k .

2702

3. Маша пишет в ряд крестики и нолики — всего 1000 символов. Оказалось, что количество символов между любыми двумя ноликами отлично от 12. Какое наибольшее количество ноликов могла написать Маша?

902

4. Числа a, b, c удовлетворяют равенству

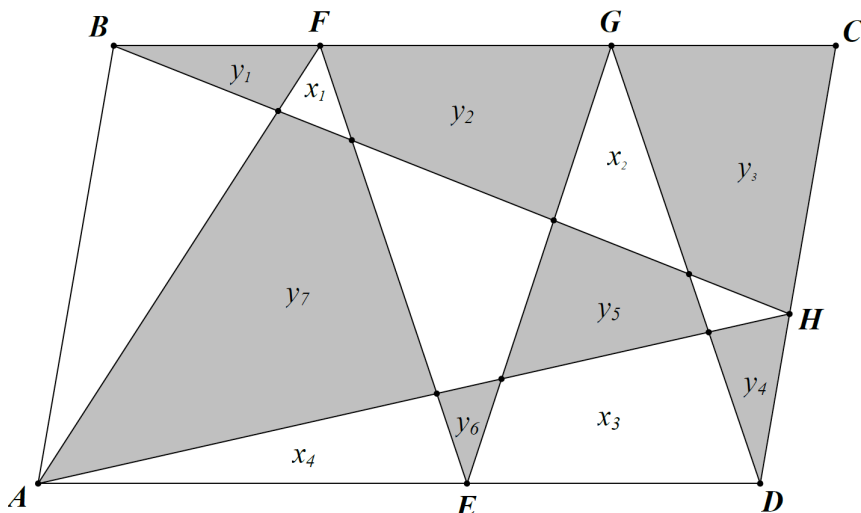
$$10(a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b),$$

причём обе части равенства ненулевые. Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$S = a + b + c.$$

10

5. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H и соединены отрезками друг с другом и с вершинами параллелограмма, как показано на рисунке. Полученные в результате разбиения параллелограмма многоугольники раскрасили в шахматном порядке. Для всех частей, закрашенных серым цветом, кроме одной, Петя отметил на рисунке их площади y_1, \dots, y_6 . Найдите площадь y_7 оставшейся серой части.



$$y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

6. Рассматривают все непустые подмножества множества $T = \{1; 2; \dots; 100\}$. Для каждого из них вычисляют среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Пусть A — среднее арифметическое всех средних арифметических, вычисленных для подмножеств, содержащих число 40, а B — аналогичная величина для всех подмножеств, содержащих число 61. Найдите сумму $A + B$.

$$101$$

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω , а его диагональ AC — биссектриса угла BAD . Найдите радиус окружности ω , если $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = \frac{3}{2}$, $AD = \frac{5\sqrt{2}}{4}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

$$0.8880$$

8. В течение $2N$ дней Петя планирует готовиться к экзаменам по N различным предметам, среди которых есть математика, физика и информатика. К каждому из экзаменов он будет готовиться ровно два дня, причём ни к математике, ни к физике, ни к информатике он не хочет готовиться два дня подряд, а каждый день он готовится только к одному предмету. Сколькими способами Петя может выбрать порядок, в котором он будет готовиться к экзаменам?

$$\frac{8-N^2}{i(8-N^2)} \cdot \frac{8}{2} - \frac{2-N^2}{i(2-N^2)} \cdot \frac{8}{2} + \frac{1-N^2}{i(1-N^2)} \cdot \frac{8}{1} - \frac{N^2}{i(N^2)}$$

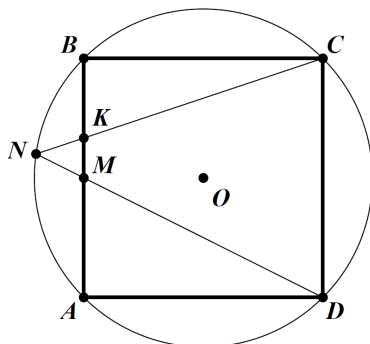
9. Последовательность x_n такова, что $x_0 = 2$, а для всех целых неотрицательных n

$$\frac{x_{n+1}}{4n^2 + 12n + 10} = \frac{x_n}{4n^2 + 4n + 2} - 1.$$

Найдите x_{100} .

$$8626668-$$

10. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность с центром O , точка M — середины его стороны AB . На чертеже отметили точки N и K . Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если расстояние $OK = L$.



$$\frac{9}{\sqrt{784}}$$