

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2026 год, вариант 1

1. Пусть a, b, c — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел $0, a, b$ и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, \dots, f_6 . Пусть $f = f_1 + f_2 + \dots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = 11$, а $f(1) = -1$. (Сами числа a, b и c не даны.)

17

2. Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc, b + ac$ и $b^2 - a^2 + 21c^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

(1; 2; 0), (1; 6; 2)

3. Петя случайно раскладывает 56 одинаковых шаров по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

 $\frac{61}{5}$

4. Окружность ω , построенная на высоте AH треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB этого треугольника в её середине M . Высота AH лежит внутри треугольника. На стороне AC отмечена точка X такая, что CM делит отрезок HX пополам. Найдите отношение $AH : HC$, если $BC : AB = 2\sqrt{2}$.

 $\frac{8}{1}$

5. Цветочный луг, гречишное поле и липовая роща расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между лугом и полем так, чтобы сумма расстояний от улья до луга, поля и рощи была наименьшей. На каком расстоянии от луга установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1000 м, расстояния от улья до луга, рощи и поля (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от рощи до луга и расстояние от рощи до поля — соответственно вторым, четвёртым и шестым членами некоторой арифметической прогрессии?

1049 м

6. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ . Пусть M и T — соответственно середины сторон AC и AB . Известно, что $\angle PBQ = \angle PMQ$. Найдите QT , если $AB = 3, BC = 5$.

1

7. Найдите все отрицательные значения параметра a , для каждого из которых найдётся такое значение b , что система

$$\begin{cases} y = x + b, \\ y(|x| - |x - a| - a) = 2(x - a) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

□