

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 9 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 2

1. Точки  $K$ ,  $M$ ,  $P$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно. Известно, что  $BKPM$  — квадрат, а расстояния от точек  $K$  и  $M$  до прямой  $AC$  равны 13 и 17 соответственно. Найдите площадь квадрата  $BKPM$ .

458

2. Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям:

- число нечётное, но не является простым,
- оно может быть представлено в виде суммы таких двух натуральных чисел, что если одно из этих чисел увеличить в 178 раз, а другое — уменьшить в 178 раз, их сумма не изменится.

537

3. Назовём натуральное четырёхзначное число **хорошим**, если оно имеет в своей записи ровно две различные цифры, причём эти цифры имеют одну чётность. Найдите количество хороших чисел.

252

4. Попарно различные натуральные числа  $m$ ,  $n$ ,  $k$  таковы, что

$$m + n + k = 301.$$

Найдите наибольшее возможное значение суммы корней уравнения  $2x^2 + (m+k)n = (m+2n+k)x$ .

299,5

5. Про числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  известно, что

$$a^2 + 7b^2 = 14, \quad bc - ad = 7, \quad ac + 7bd = \sqrt{210}.$$

Найдите наибольшее значение выражения  $c^2 + 7d^2$ .

39,5

6. Время работы ноутбука от батареи обратно пропорционально мощности, потребляемой всеми его компонентами. Если ноутбук полностью заряжен, то он проработает с максимальной яркостью экрана 4 часа. При этом  $2/3$  мощности потребляет экран. Вася использует ноутбук следующим образом: каждый раз, когда батарея разряжается на очередные 25% от изначального значения (то есть достигает уровня 75%, 50%, 25%), он уменьшает яркость экрана на 25% (от первоначального значения яркости). Сколько времени ему удастся проработать за ноутбуком? Мощность, потребляемая экраном, прямо пропорциональна яркости экрана. Ответ выразите в часах и при необходимости округлите до трёх знаков после запятой.

5,7

7. На доске написано число 987 656 789. Вася заменил в нём какие-то 4 цифры так, что получилось минимально возможное девятизначное число, делящееся на 275. Найдите это число.

107 656 725

8. Окружность  $\omega$  касается оснований  $AD$  и  $BC$  равнобокой трапеции  $ABCD$  в их серединах и пересекает боковую сторону  $AB$  в точках  $K$  и  $L$  таких, что  $K$  лежит между  $A$  и  $L$ , а  $AK = 24$ ,  $KL = 30$ ,  $BL = 10$ . Найдите квадрат радиуса окружности  $\omega$ .

096

9. Дано множество чисел  $M = \{2024, 2025, \dots, 2031\}$ . Для каждого непустого подмножества множества  $M$  (включая само множество  $M$ ) вычислили сумму чисел, входящих в это подмножество, а затем все эти суммы сложили, получив число  $S$ . На какое двузначное число заканчивается  $S$ ?

09

10. На клетки доски  $12 \times 12$  положили камни попарно различного веса (в каждую клетку положили ровно один камень). Тройку клеток назовем **хорошей**, если они расположены в виде «уголка», а камень, лежащий в «вершине» уголка, тяжелее каждого из двух камней, лежащих в двух остальных клетках уголка. Какое наибольшее количество хороших троек клеток может быть на доске? Тройки могут пересекаться.

242