

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 1

1. На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число $A = 1188$, чтобы получилось некоторое натуральное число в натуральной степени, отличной от 1?

88

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . Точки P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно, а $\sqrt{6}$ и $\sqrt{24}$ — радиусы этих окружностей. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника HPQ .

71

3. Ваня и Лёня бегают по круговой дорожке стадиона 500-метровой длины в одном направлении. Ваня бежит с постоянной скоростью v км/ч, но он начал пробежку на 23 минуты позже Лёни. А Лёня бежит с постоянной скоростью 12 км/ч, но останавливается на 1 минуту через каждые 300 метров. С какой скоростью v бежит Ваня, если известно, что они одновременно пересекли финишную черту, пробежав ровно по 20 кругов каждый?

01

4. Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, и при этом $\angle CED = 90^\circ$. Точки O , P , Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ADE , BCE , CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 20$, $OP = 29$.

0891

5. Есть 300 карточек с числами от 1 до 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, числа на карточках попарно различны). Сколькими способами можно выбрать три карточки, чтобы сумма чисел на них была кратна 3?

3 · C₁₀₀¹⁰⁰ · 3 = 1 485 100

6. Ненулевые числа a , b , c таковы, что

$$\frac{a}{b+c-5a} = \frac{b}{a+c-5b} = \frac{c}{a+b-5c}.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{a} + \frac{5a}{b} + \frac{5c}{b}$?

-7

7. Центр окружности ω радиуса R расположен на гипотенузе AC треугольника ABC . Известно, что ω пересекает AC в точках P и E (P лежит между A и E) и касается обоих катетов треугольника ABC . Найдите CE , если $AP = 4$, а радиус окружности ω равен 10,5.

4,725

8. Сколько существует способов переставить местами буквы $abcabe$ так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

$$\boxed{18 = 1! + \frac{2}{1!} \cdot 2 - \frac{2!}{1!}}$$

9. Числа a, b, c с нулевой суммой таковы, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 49.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

$\boxed{2-}$

10. Учитель математики договорился с пришедшими на кружок 23 учениками, что они выберут, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто — рыцарем (всегда говорить правду). После чего учитель раздал ученикам карточки с числами, причем числа на всех карточках различны. Ученики встали по кругу и посмотрели карточки соседей. После этого каждый из учеников сказал: «Число на моей карточке больше, чем у моих соседей». Какое наибольшее количество учеников могут сказать: «Число на моей карточке меньше, чем у моих соседей»?

$\boxed{12}$