Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 3

1. Для каждого целого k ($-36 \leqslant k \leqslant 15$) Петя выписал на доску трёхчлен

$$y = x^2 + kx + 117.$$

После чего Вася для каждого из этих трёхчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

435

2. Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел

$$1^2, 2^2, \ldots, 2024^2$$

на 2024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

1 519

3. Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 25. Какое наименьшее значение может принимать число a_{10}?

30

4. Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно 3. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

0,2426

5. Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 3a^2b^2$?

108

6. При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства

$$\log_{x+1}(3 - ax) > 0$$

удовлетворяет неравенству $x^2 + \dfrac{2a-5}{2a}x - \dfrac{5}{2a} > 0$?

−2,5

7. В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 10$, $S_{PTR} = 11$, $S_{RTL} = 12$?

5 313

8. Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе

$$y = x^2 + 3x + 2.$$

Найдите минимально возможную ординату точки M.

$\boxed{-0{,}5}$

9. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 5, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 1. Найдите косинус угла ABD.

$\boxed{0{,}125}$

10. Каждый из 11 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 5 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

$\boxed{462}$