

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 2

1. Олег выписал в строку 110 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 12-е число делится на 12, 75-е — на 75, а 110-е — на 110. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

10879

2. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2 - y^2 = 31^{405}$.

812

3. Про вещественное число x известно, что

$$\sin x + 1001 \cos x = 1000.$$

Найдите максимальное значение выражения $|1001 \sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

44,744

4. Натуральное число N имеет 198 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $13N$ (включая единицу и само число $13N$) равно 264. Определите минимально возможное значение N .

7787520

5. Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,8, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

81,0

6. В треугольнике ABC со стороной $BC = 3\sqrt{193}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 25,2. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC .

8

7. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$3x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2022} - x_{2020}}{x_{2025} - x_{2021}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

2,7

8. Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S , которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка увеличили на 13 гектаров, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 2 раза больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 3,5 тысячи рублей больше налога, а с большего на 4 тысячи рублей меньше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

29

9. В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади

$$\frac{1625}{4}, \quad \frac{1885}{4}, \quad 585,$$

образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 360. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

082 Э

10. В некоторые из 40 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

6Э