

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 1

1. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P . Известно, что $AP = 1$, $BP : PC = 2$, а высота BH треугольника ABC равна 0,5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP .

Э

2. Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство

$$7p + q^5 = 17528.$$

Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

011

3. Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 13-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 13-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 13-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 13-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем Ваня, съели мама и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

2.007

4. Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 302 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

$$C_3^{101} \cdot 2 + C_3^{100} \cdot 100 + C_3^{99} \cdot 100 = 1515100$$

5. Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P . Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 3$, $EP = 4$.

5,76

6. У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 10, а всех конфет N — не менее 40?

26

7. Пункт B расположен на прямолинейной дороге между пунктами A и C , причём $AB : BC = 8$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A , Винни-Пух — в пункте B , а Кролик — в пункте C . Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C , Винни-Пух — из B в C , а Кролик — из C в A . Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C .)

1.125

8. Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA , SB , SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC . Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \frac{10}{\sqrt{149}}$.

2.0

9. Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a + b$ чётна, удовлетворяют равенству

$$(a + 1)a + 7b = 1\,000\,001?$$

141

10. В вершинах правильного 30-угольника разместили 28 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

08