

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 2

1. Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать три числа так, чтобы одно из них равнялось среднему арифметическому двух оставшихся?

2 450

2. Олег должен написать в тетради 373 подряд идущих натуральных числа таких, что их среднее арифметическое — простое число. Какое наименьшее число он мог написать в тетради?

5

3. На доске написано число 23 456 789. Петя заменил в нём 5 цифр: 4 последние цифры и ещё какую-то. В итоге получилось восьмизначное число, делящееся на 48, притом минимально возможное. Что это за число?

13 450 032

4. Найдите максимальное значение отношения $\frac{x}{y}$, если $90 - 12y + y^2 - 16x + x^2 = 0$.

3

5. Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается его стороны BC в точке D . Пусть E — середина BC , а точка F взята на стороне AC так, что $BF \perp AI$. Найдите длину отрезка CF , если $AB = 20$, $BC = 16$, $DE = 2$.

4

6. Антон выписал на доску числа $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2025}$ такие, что не все они равны между собой. Внимательно изучив числа на доске, Константин заметил следующую закономерность: для любого натурального значения $k \in [2; 2024]$ число $A_{k+1} - A_k$ вдвое меньше, чем $A_{k+1} - A_{k-1}$. Каково наименьшее возможное значение отношения

$$\frac{A_{100} - A_{98}}{A_{2023} - A_{2013}} ?$$

2,0

7. Какое наименьшее значение может принимать сумма 20 различных натуральных чисел таких, что

- ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7,
- сумма любых двух чисел делится на 2,
- сумма любых трёх чисел делится на 3,
- сумма любых пяти чисел делится на 5,
- сумма любых семи чисел делится на 7?

0266E

8. Окружности ω_1 и ω_2 имеют радиусы 5 и 8, а расстояние между их центрами больше 13. Оказалось, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, ограниченного одной общей внешней и двумя общими внутренними касательными к этим окружностям.

07

9. В лесничестве организовали три пункта A , B , C подкорма птиц на время зимних холодов. В силу особенностей их расположения в пункт A прилетает больше всего птиц, а в пункт C — меньше всего. Ежедневно на эти три пункта в сумме выделяется S килограммов корма, который распределяется пропорционально количеству птиц, прилетевших в данный пункт накануне. Известно, что:

- 1 января количества птиц, прилетевших в три пункта, составили геометрическую прогрессию;
- 2 января в каждый из пунктов прилетело на 130 птиц больше, чем 1 января;
- 2 января в пункт C прилетело ровно в 3 раза меньше птиц, чем в пункт A ;
- 3 января в пункт A выделили на 2,34 кг меньше корма, чем 2 января;
- 3 января в пункт C выделили на 1,56 кг больше корма, чем 2 января.

Найдите S . Ответ укажите в килограммах.

11.34

10. Фокусник попросил 60 зрителей загадать различные числа, каждого — одно число. За один вопрос фокусник может выбрать любых трёх зрителей и спросить, какие числа они загадали. В ответ ему скажут множество из трёх чисел. За какое наименьшее количество вопросов фокусник может указать, какие числа загадал каждый из зрителей?

0E