

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2024/25 год, онлайн-этап, вариант 1

1. Среди всех решений уравнения

$$3930400x = y^z,$$

где x, y, z — натуральные числа, причём $z \geq 2$, найдите такое, при котором x принимает наименьшее значение. В ответе укажите соответствующее значение y .

348

2. Трапеция $ABCD$, основание AD которой вдвое больше основания BC , вписана в окружность ω . Прямая, проходящая через вершину B параллельно CD , пересекает вторично окружность ω в точке P , а сторону AD — в точке N . Найдите периметр трапеции $ABCD$, если известно, что $BN = 4$, $PN = 9$.

92

3. В арифметической прогрессии, состоящей из 11 членов, сумма квадратов первых пяти членов на 0,75 больше суммы квадратов последних пяти членов. Найдите разность между суммой квадратов первых четырёх членов и суммой квадратов последних четырёх членов этой прогрессии.

0,7

4. Даны две концентрические окружности Ω и ω с центром в точке O , причём радиус Ω больше радиуса ω . На луче с началом в точке O , пересекающем окружность Ω в точке A , отмечена точка B такая, что $OB > OA$. На окружности ω выбраны точки K и M таким образом, что прямые AM и BK касаются этой окружности. Прямая BL касается окружности Ω в точке L . Найдите наибольшую возможную длину BL , если $AM = 20$, $BK = 29$.

21

5. На доске написаны подряд идущие натуральные числа от 1 до 301 (каждое из них ровно один раз). Сколькими способами можно стереть три из написанных чисел так, чтобы остаток от деления суммы всех чисел на доске на 3 после этого не изменился?

$$2 \cdot C_3^{300} + C_3^{100} + 100C_2^{101} + (1 + 100) \cdot 100 = 1500050$$

6. Из пункта A в пункт C по прямолинейной железной дороге с постоянной скоростью 60 км/ч движется поезд. В точке B , расположенной на расстоянии 2 км от железной дороги и на расстоянии 3 км от точки A , находится мотоциклист. С какой минимальной постоянной скоростью должен двигаться мотоциклист, чтобы догнать поезд, если известно, что угол BAC острый? Ответ дайте в км/ч.

40

7. Найдите количество всех пар натуральных чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство

$$x^2 + x + 5y = 1\,000\,002.$$

007

8. Для положительных чисел x и y с суммой 7 Петя выписал на доску числа

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y}, \quad \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}.$$

Оказалось, что выписанные числа образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Какое наибольшее значение может принимать сумма $x^2 + y^2$?

245

9. Города X и Y расположены на реке, причём X — выше по течению, а между ними находится пристань P . В 8:00 катамаран и лодка находились в городе X , плот — у пристани P , а катер — в городе Y . Они одновременно начали движение: катер — вверх по течению, а катамаран, лодка и плот — вниз по течению. Известно, что лодка и плот встретились в том же самом месте, где катамаран встретился с катером. Кроме того, катамаран и плот встретились в том же самом месте, где встретились лодка и катер. Все движутся с постоянными скоростями, скорость катера в 6 раз больше скорости плота (то есть одно и то же расстояние катер проходит в 6 раз быстрее, чем плот), а места встречи плота с лодкой и с катамараном различны. Найдите отношение расстояния XP к расстоянию PY .

0,2

10. В вершинах правильного 50-угольника разместили 49 белых и 1 чёрную фишки. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

72