Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2025 год, вариант 1

1. При каком наименьшем натуральном n число

$$n! + (n+1)! + (n+2)!$$

делится на 361?

$\boxed{n = 17}$

2. Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N.

$\boxed{20}$

3. Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|.$$

$\boxed{x \in [3; \frac{7}{2}]}$

4. На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

$\boxed{4 \cdot 43 \cdot 43 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 44 \cdot 42 + 4 \cdot 47 \cdot 41 + 45 \cdot 45 = 28553}$

5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

$\boxed{(8; \pm 83)}$

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.

$\boxed{a = 1;\ a = \frac{5-\sqrt{57}}{2}}$

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

$\boxed{10^\circ}$