

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2025 год, вариант 2

1. Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что

- уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение,
- а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение.

Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

47

2. Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?

50451

3. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

67

4. Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

(5; 3), (16; 12), (3; 5), (9; 12), (12; 16)

5. На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.

$\frac{5}{22\sqrt{}}$

6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

{1; 0; 2} \setminus \mathbb{R}

7. В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что

$$AO = 1, \quad BO = 2, \quad CO = 4, \quad AP = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}, \quad CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}, \quad CN = 2\sqrt{5}.$$

$V = \frac{40\sqrt{5}}{9}$; расстояние от центра ω до плоскости PAC равно нулю