

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2025 год, вариант 2

1. На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 72^\circ$.

20

2. Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a - b|, \\ 7 \cdot \max(a; b) = 8(\text{НОД}(a; b))^2 - 64. \end{cases}$$

(64; 64), (56; 64)

3. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y + 3 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - y}} > y^2 + 12y.$$

(0; -3), (-1; -2), (-2; -1), (-3; 0)

4. Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{x(y - z)}{y(z - x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z - x)}{z(y - x)}$$

принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

$A = 1$ или $A = -2$

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DH = 20$, $AH = 15$, $CX = 36$.

$4\sqrt{85}$

6. Решите уравнение $\sqrt[4]{8x + 1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x - 1}$.

81

7. Сколькими способами из натуральных чисел от 2002 до 2025 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 8?

1012