

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 9 класс, 2024 год, вариант 2

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$$

имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз.

9 - = v ' 1 = v

2. Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 30$ ,  $BC = 24$ ,  $AC = 18$ . На стороне  $BC$  отмечено последовательно 23 точки:  $B_1, B_2, \dots, B_{23}$  так, что эти точки разбивают  $BC$  на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне  $AC$  отмечено последовательно 17 точек:  $A_1, A_2, \dots, A_{17}$  так, что эти точки разбивают  $AC$  на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$ ?

08

3.  $AH$  — высота равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Точка  $M$  — середина стороны  $AB$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AH = MK$  и  $AK = 5$ .

001

4. Из множества  $M$ , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок — простое число. Пусть  $p$  и  $q$  — две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 240$ .

{13, 14, 15, 16, 17}

5. Остроугольный треугольник  $ABC$  площади 80 вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  — его высоты. Найдите площадь треугольника  $BOA_1$ , если площади треугольников  $COB_1$  и  $AOC_1$  равны 12 и 20 соответственно.

8

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

(2; -2), (-2; 2)

7. Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) приборов в месяц потребует на первом заводе  $2q^2$  тыс.руб., на втором заводе  $2q^2 + 2q$  тыс.руб., и на третьем  $2q^2 - q$  тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

первый и второй заводы должны выпускать по 88 приборов, третий завод — 78