

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2024 год, вариант 1

1. Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

$$\boxed{x^2 + 1 = x, 1 = x}$$

2. Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

□11

3. Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n \quad \text{и} \quad B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

$$\boxed{(3; 0), (0; 3)}$$

4. Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

$$\boxed{BC = 8\sqrt{2}}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{2}{5+5\sqrt{13}}, \frac{2}{5+5\sqrt{13}}\right)}$$

6. На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

□28

7. В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

$$\boxed{AC = 16, BC = 10}$$