

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2023/24 год, онлайн-этап, попытка 2

1. Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$. Известно, что

$$b_2 + b_4 = 10, \quad b_4^2 - b_2^2 = 60.$$

Чему равен пятый член прогрессии?

91

2. Найдите вероятность, что у случайно выбранного восьмизначного нечётного числа все цифры являются нечётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

0.0080

3. Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\sin^2 x, \quad \sin^2 y, \quad \sin^2 x + \cos^2 y + 2 - \cos^2 2x, \quad 2 + \sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x-y}{\pi}$.

0.5

4. Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77, ...). Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна 10278?

30

5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC , длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1 , B_1B и BC отмечены точки P , Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 2 : 5$, $B_1Q : B_1B = 1 : 4$ и $BR : BC = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC .

2.2

6. Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения

$$x^3 - 3x^2 - 2x = m \quad \text{и} \quad x^3 + 4x^2 - 9x = k$$

имеют два общих корня?

12

7. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 48$, $BC = 60$, $CD = 24$, $AD = 12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые AD и BC — в точке F . Найдите квадрат длины отрезка EF .

2849

8. В каждую клетку доски 26×25 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

318

9. За круглый стол сели 95 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

89

10. Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 4, вторым — число 6. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b - a$. Какое число он запишет 1501-м?

1 128 752