

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2023/24 год, онлайн-этап, попытка 1

1. Три натуральных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго вычесть 3, а из третьего вычесть 14, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Чему равна сумма трёх членов геометрической прогрессии, если разность арифметической прогрессии равна 1?

26

2. Найдите количество десятибуквенных «слов», составленных из букв А, Б, В (под «словом» понимается любая последовательность подряд идущих букв) таких, что в них есть не более трёх букв Б.

33024

3. Сколько существует квадратных трёхчленов вида

$$x^2 + ax + b$$

с целыми корнями, у которых $a + b = 19$.

9

4. Когда каждое из 15 последовательных натуральных чисел уменьшили на 2, произведение этих чисел уменьшилось в 3 раза. Найдите наименьшее из 15 исходных чисел.

22

5. Маша и Даша должны посадить по 80 кустиков клубники каждая. Маша первую половину работы делает с некоторой фиксированной скоростью, а при выполнении второй половины работы увеличивает скорость на 3 кустика в час. Даша первую половину работы проделывает со скоростью в $\frac{7}{6}$ раз больше Машинной, а на вторую половину работы она увеличивает свою скорость ещё на два кустика в час. Известно, что Маша на всю работу затратила не менее 6 часов, а Даша — не более $\frac{75}{14}$ часов. Сколько кустиков в час высаживала Маша первоначально?

12

6. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O . Известно, что $OB = 15$, $OC = 12$, $OD = 25$, $CD = \sqrt{769}$. Найдите AB .

25

7. На факультете учатся 100 студентов. До зачёта каждые два студента встретились хотя бы на одной лекции по истории. При этом на каждой лекции по истории было не больше 50 студентов. Какое наименьшее число лекций по истории могло пройти до зачёта?

9

8. За круглый стол сели 126 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные — в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

19

9. Про многочлен

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

известно, что каждый из коэффициентов a_0, \dots, a_5 равен либо $+1$, либо -1 , а значение $q(2) = -37$. Найдите $q(-3)$.

148

10. Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, а X — точка пересечения перпендикуляра к AB , проходящего через точку A , с перпендикуляром к BC , проходящим через точку Q . Найдите длину отрезка BC , если известно, что $PX = 29$, а угол BAC острый и $\sin \angle BAC = \frac{1}{8}$.

7,25