Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2023 год, вариант 2

1. Решите уравнение

$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$

2. Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

$\boxed{20\,402}$

3. Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

$\boxed{x \in (0; \tfrac{1}{2}] \cup \{1\}}$

4. На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

$\boxed{a = \frac{257}{60},\ S = \frac{289}{30}}$

5. Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E — середины сторон AC и AB соответственно, CF — биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\dfrac{CF}{DF} = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\angle B = 90^\circ,\ \angle C = \arccos\frac{1}{7},\ \angle A = \arcsin\frac{1}{7}}$

6. Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

$\boxed{-2}$

7. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD — высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

$\boxed{\text{а) } \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{б) } \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}}$