

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2023 год, вариант 2

1. Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

$$[1; 1] \cap [1; \infty) \ni x$$

2. Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

$$10302$$

3. Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

$$(7; 9)$$

4. Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  — биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

$$\frac{3}{2} \text{ числа} = 17 \cdot \frac{3}{2} \text{ числа} = 17 \cdot \frac{3}{2} = 25,5$$

5. На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

$$\frac{3}{10} \sqrt[4]{\frac{17}{50}} = 9, \frac{17}{25} = 0,68$$

6. Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

$$5^{\wedge} 5 -$$

7. Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

$$\frac{7}{2}$$