

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2022/23 год, онлайн-этап, попытка 4

1. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $CB$  и  $CA$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $MN$ , пересекает окружность в двух точках, из которых точка  $P$  — ближайшая к точке  $B$ . Найдите  $PM$ , если известно, что  $BP = 17$  и  $MN = 153$ .

19

2. Пусть  $x$  и  $y$  — положительные числа, удовлетворяющие соотношению

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 33xy = 2662.$$

Найдите минимально возможное значение суммы  $x + y$ .

11

3. Найдите количество различных значений функции  $f(x) = [x] + [2x] + [3x] + [4x] + \left[\frac{5x}{3}\right]$  на отрезке  $x \in [0; 100]$ .

Здесь  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Например,  $[1,7] = 1$ ,  $[-1,7] = -2$ .

734

4. У Ольги есть конфеты 30 сортов. Она хочет выложить конфеты по кругу так, чтобы для любых двух сортов нашлись рядом лежащие конфеты этих сортов. Какого наименьшего количества конфет ей для этого хватит?

450

5. На трёх параллельных прямых  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  взяты точки  $A_1, A_2, A_3$  соответственно, и при этом  $A_1A_2 = A_1A_3$ . Известно, что расстояние между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$  равно 5, расстояние между  $\ell_1$  и  $\ell_3$  равно 8, а расстояние между  $\ell_2$  и  $\ell_3$  равно 13. Найдите минимально возможную площадь треугольника  $A_1A_2A_3$ .

19,5