

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 9 класс, 2022 год, вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

$$\{x\} \cap (2; 0) \ni x$$

2. Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

$$67$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right), \left(\frac{2}{12}, \frac{2}{12}\right), \left(\frac{3}{12}, \frac{3}{12}\right), \left(\frac{4}{12}, \frac{4}{12}\right), \left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

4. Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $S$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 6, а радиус окружности равен 4.

$$4 : 3$$

5. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{7}$ ,  $BC = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ , а  $\angle CED = 30^\circ$ .

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$$

6. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

$$7 - 2\sqrt{2}$$

7. Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 18$ ,  $1 \leq y \leq 18$  и  $f(x/y) < 0$ .

$$145$$