

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2022 год, вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

(87-6)

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

$\{1\} \cap \left[\frac{3}{4}, \frac{6}{7} \right)$

3. Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

681

4. Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром S , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ — прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

$09 = \angle CPN = 90^\circ, \angle NCP = \arctg \frac{12}{5}, \angle C = 180^\circ - \angle NCP - \angle CPN = 90^\circ - \arctg \frac{12}{5} = \arctg \frac{5}{13}$

5. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x + 2y) - \sqrt{3} \sin(x + 2y) = -16 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

$\frac{5}{1} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

6. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

$\frac{5}{2} = q, \frac{5}{4} = p$

7. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, грани $ABCD$ и $CDD_1 C_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$, плоскости CDD_1 , а также плоскости ABC в точке A . Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M . Найдите $\angle BB_1 C_1$ и объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1 M = 3$.

$$\angle BB_1 C_1 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}, V = 80$$