Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2022 год, вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

□

2. Решите неравенство $\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}$.

□

3. Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

$\boxed{189}$

4. Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ — прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

$\boxed{\angle ADC = \operatorname{arctg} \frac{12}{5},\ \angle NQC = 90^\circ,\ S_{NCDQ} = 60}$

5. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

$\boxed{-\frac{2}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{4\sqrt{3}}}$

6. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

$\boxed{a = \frac{4}{3},\ b = \frac{25}{3}}$

7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

$\boxed{\angle BB_1C_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}} = \pi - \arccos\frac{1}{5},\ V = 80}$