

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 11 класс, 2022 год, вариант 1

1. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$$\left\{ \frac{2}{1}, -2, 0 \right\}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

$$\left( \frac{2}{5}\sqrt{1 - \frac{2}{5}}\sqrt{1 - 2}, (6; 2) \right)$$

3. Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

$$[9; 0) \cup (81; +\infty)$$

4. Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  — диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 8$ ,  $BD = 17$ .

$$R = \frac{6}{85}, r = \frac{136}{1361}, \angle AFE = 45^\circ + \arccos \frac{17}{15}, S_{\triangle AEF} = \frac{17}{25}$$

5. Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 24$ ,  $1 \leq y \leq 24$  и  $f(x/y) < 0$ .

□

6. Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ .

$$\frac{5}{1} = q, 2 = v$$

7. Дана пирамида  $ABCD$ , вершина  $A$  которой лежит на одной сфере с серединами её рёбер, кроме ребра  $AD$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BD = 2$ ,  $CD = 3$ . Найдите длину ребра  $BC$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$BC = \sqrt{\frac{3}{2}}, R_{\text{min}} = \frac{3}{2}$$