

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2021 год

1. Точка  $D$  лежит на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . Окружность с диаметром  $BD$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $T$  соответственно. Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AD$  и  $CD$  соответственно. Известно, что  $PM \parallel TN$ .

а) Найдите угол  $ABC$ .

б) Пусть дополнительно известно, что  $MP = \frac{1}{2}$ ,  $NT = \frac{5}{2}$ ,  $BD = 2$ . Найдите площадь треугольника.

$\frac{7}{2\sqrt{6}}$  (9 : 06 (в

2. Решите уравнение  $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$ .

$\frac{7}{11\sqrt{3-2}}$  (в

3. На плоскости  $Oxy$  уравнением  $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$  заданы координаты точки  $A$ , а уравнением  $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$  — парабола с вершиной в точке  $B$ . Найдите все значения параметра  $a$ , при которых точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $3x - y = 4$  (точки  $A$  и  $B$  не лежат на этой прямой).

$(\infty + ; \frac{8}{9}) \cap (0 ; \frac{8}{1} -) \cap (1 - ; \infty -)$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2 + y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

$(1 \mp ; 1 -) \cup (1 \mp ; 1)$

5. На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(0; 59)$ ,  $(59; 59)$  и  $(59; 0)$ . Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых  $y = x$  или  $y = 59 - x$ , но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой параллельной любой из координатных осей.

088028

6. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ , и при этом треугольники  $BOC$  и  $AOD$  — правильные. Точка  $T$  симметрична точке  $O$  относительно середины стороны  $CD$ .

а) Докажите, что  $ABT$  — правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 3$ ,  $AD = 7$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABT$  к площади четырёхугольника  $ABCD$ .

$\frac{001}{62}$ (9)
----------------------