

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2021 год

1. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N — середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника.

$\frac{7}{2\sqrt{6}}$ (9 : 06 (в

2. Решите уравнение $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$.

$\frac{7}{11\sqrt{2}}$ (в

3. На плоскости Oxy уравнением $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ заданы координаты точки A , а уравнением $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ — парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

$(\infty + ; \frac{8}{9}) \cap (0 ; \frac{8}{11} -) \cap (1 - ; \infty -)$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2 + y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

$(1 \mp ; 1 -) \cup (1 \mp ; 1)$

5. На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 59)$, $(59; 59)$ и $(59; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 59 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой параллельной любой из координатных осей.

033023

6. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD — правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT — правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

| |
|----------------------|
| $\frac{001}{62}$ (9) |
|----------------------|