

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 9 класс, 2020 год, вариант 2

1. Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке  $O(0; 0)$ . Пчела движется по часовой стрелке, а шмель — против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках  $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  и  $N_0(2; 0)$  соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right); \left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. Найдите все тройки целочисленных параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

$$(3; 2; 4); (-4); (-3; -2; -3); (-4); (-1; 1; -8)$$

3. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1\right) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0.$$

$$1 - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

4. Решите уравнение

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0.$$

$$\frac{2}{\sqrt{17}}; 1; \frac{2}{3}$$

5. Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

$$\text{Вероятность второго события больше}$$

6. Две параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $l_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $l_2$  в точках  $B$  и  $E$ , а также вторично пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно  $\frac{5}{4}$ . Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .

$$\frac{5}{9}$$

7. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$a \in (-12; -6) \cup (6; 12]$$