

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2020 год, вариант 1

1. На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук — против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; -2 \right), (0; -4), \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; 2 \right)$$

2. Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; -2 \right), \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; 2 \right), (1; 3), (3; 1)$$

3. Решите уравнение

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6.$$

$$\frac{2}{1-\sqrt{13}}$$

4. Решите неравенство

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0.$$

$$\left(\infty; \frac{2}{\sqrt{13}-1} \right] \cap \left[\frac{2}{1-\sqrt{13}}; 1 \right) \cap \left[\frac{2}{\sqrt{13}-1}; \infty \right)$$

5. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

$$0889$$

6. Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй — точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

$$81$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} |x - 3 - y| + |x - 3 + y| \leq 6, \\ (|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25. \end{cases}$$

(0:9) (0:0)