

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2020 год, вариант 1

1. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

0891

2. Решите уравнение

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi \left(\frac{11}{4\pi^2} + \frac{\pi}{2} = x, \frac{3}{4\pi^2} + \frac{\pi}{2} = x, \frac{7}{4\pi^2} + \frac{\pi}{2} = x \right)$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{1-\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}-6} \right); (3; 6); (7; 7)$$

4. Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

$$\frac{6}{91} = S \left(\frac{8}{1} \right) \text{ площадь } = OSKZ$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\{25; 1\} \ni a$$

6. а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй — точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

$$(a) \text{ } S_{ACF} = 49$$

7. Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}; \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$61 \cdot 2^{69} + 2144$
