

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2020 год, вариант 2

1. Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

Вероятность второго события больше

2. Дана конечная арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots, a_n с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S , а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S , если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

Увеличится в $\frac{5}{3}$ раз

3. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5\right) |x^3 - 7x^2 + 13x - 3| \leq 0.$$

 $x^2 + 2$

4. Решите уравнение

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x - 4| + 16 = 0.$$

 $\frac{2}{21} \pm \frac{8}{7}$

5. По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(2; 2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

$$\left(1 - \frac{2}{\sqrt{7}}\right) \frac{2}{\sqrt{7}} = q \text{ и } \left(1 + \frac{2}{\sqrt{7}}\right) \frac{2}{\sqrt{7}} = v \text{ где } (v - q) : (q - v) = (v : q) : (q : v)$$

6. а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 1$.

$$\frac{8}{\sqrt{7}} = r_2 : \frac{4}{\sqrt{7}} = r_1 \text{ где } (9 : \frac{8}{7})$$

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 64, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\boxed{\{ -8 - 12\sqrt{2} \} \cup \{ -8 + 12\sqrt{2} \} \cup [-8; 8] \cup [-24; -8]} \in a$$