Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2019 год, вариант 2

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

$\boxed{\sqrt{38}}$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt[6]{4x^2}}{(x^2 - 4|x|)^2 - 8x^2 + 32|x| - 48} \geqslant 0.$$

$\boxed{x \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4] \cup (6; +\infty)}$

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

$\boxed{b_1 = 3,\ q = \frac{1}{2}}$

4. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

$\boxed{\frac{289}{338} \text{ или } \frac{1}{2}}$

5. Есть 200 различных карточек с числами $2, 3, 2^2, 3^3, \ldots, 2^{100}, 3^{100}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

$\boxed{4389}$

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - x \geqslant |x + y|, \\ \dfrac{x^2 + 8x + y^2 + 6y}{2y - x - 8} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

$\boxed{8}$

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 4$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 3, а точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

$\boxed{AP = \frac{4}{3},\ PT = \frac{\sqrt{145}}{3} - 3,\ S_{\triangle APC} = \frac{128\sqrt{5}}{87}}$