Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

11 класс, 2025 год

1. В турнире по волейболу участвовало 20 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 3 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?

54

2. Даны лежащие в одной плоскости две трапеции $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием $AD = 6$ и одинаковыми высотами, равными 8. При этом $BC = EF = 2$, расстояние между точками C и E равно 1. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P, а сторон AE и DF — в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $APQD$.

63 или 45

3. Решите неравенство

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\leqslant\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2.$$

1

4. Множество A состоит из натуральных чисел n, делящихся на $[\sqrt[3]{n}]$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x. Найдите количество чисел из отрезка $[25, 2025]$, принадлежащих множеству A.

251

5. Найдите все положительные a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2$$

выполняется при всех положительных x и y.

$(0; 16]$

6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = m$ в точке O, причём

$$CO : OD = k,\quad \angle AOC = 60^\circ,\quad AC \neq BD.$$

Для каких пар чисел m и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Если $m \neq 2$, то k — любое положительное число; если $m = 2$, то $k = 1$