Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10 класс, 2025 год

1. В турнире по волейболу участвовало 20 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 3 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?

54

2. Назовем год **замечательным**, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год — замечательный, поскольку 2025 делится на $20+25=45$. Сколько ещё замечательных годов в XXI веке (с 2001 по 2100 год включительно)?

10

3. Множество A состоит из натуральных чисел n, делящихся на $[\sqrt[3]{n}]$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x. Найдите количество чисел из отрезка $[25, 2025]$, принадлежащих множеству A.

251

4. При каких положительных значениях a, b и c достигается наибольшее значение выражения

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)}?$$

$a=2$, $b=4$, $c=8$

5. Квадрат $ABCD$ со стороной 9 и квадрат $DEFG$ со стороной π имеют общую вершину D, при этом точка E лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма $AMNF$, если точка C лежит на отрезке MN и делит его в отношении $1:\pi$.

81; $81-18\pi$

6. Отрезок $AB=1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD=m$ в точке O, причём

$$CO:OD=k, \quad \angle AOC=60^\circ, \quad AC\neq BD.$$

Для каких пар чисел m и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC=BD$?

Если $m\neq 2$, то k — любое положительное число; если $m=2$, то $k=1$