

## Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10 класс, 2023 год

1. Решите уравнение

$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2 \left( x - \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{u} + \frac{8}{u}$$

2. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час позже, при этом в пункт  $B$  они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в  $B$ , если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

$$16:00 \text{ или } 19:00$$

3. Числа  $x_1, x_2, x_3$  являются корнями уравнения  $x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 9$ . При каких значениях  $a, b, c$  корнями уравнения  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  являются числа  $x_1 + x_2, x_2 + x_3$  и  $x_3 + x_1$ ?

$$a = -12, b = 43, c = -41$$

4. В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $BE$  и медиана  $AD$  равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = \sqrt{13}$ .

$$12$$

5. Для натурального числа  $N$  выписали все его натуральные делители  $p_i$  в порядке возрастания:  $1 = p_1 < p_2 < \dots < p_k = N$ . Обозначим количество натуральных делителей числа  $N$  через  $\sigma(N)$ . Найдите все возможные значения  $\sigma(N^3)$ , если известно, что

$$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2.$$

$$5629, 5632, 5635, 11260, 13132, 14992, 26236$$