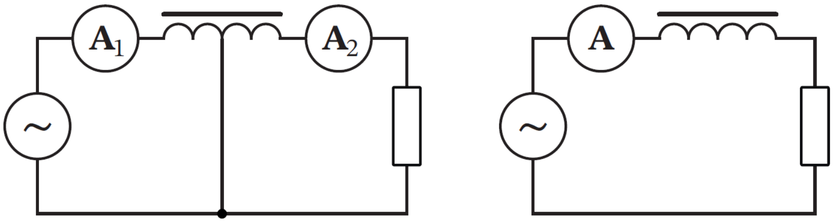
Московская олимпиада школьников по физике

11 класс, второй тур, 2023 год

Задача 1. **Как в трансформаторе.** Катушка намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. К витку в середине катушки присоединён провод, и собрана цепь, показанная на рисунке слева. Напряжение на выводах идеального генератора меняется по гармоническому закону, амплитуда не зависит от подключаемой нагрузки, внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Идеальные амперметры переменного тока A_1 и A_2 показывают токи I_1 и I_2.



Что показывает идеальный амперметр переменного тока в цепи на рисунке справа, если эта цепь составлена из тех же элементов, что и цепь на рисунке слева?

$$\boxed{I = I_2 \cdot \sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15I_2^2}}}$$

Задача 2. **Излучает и падает.** В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m_e, e, c и ε_0 соответственно.

A. Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m_e. Известно, что мощность излучения движущегося электрона даётся формулой

$$P = A \cdot e^{\alpha} c^{\beta} \varepsilon_0^{\gamma} a^{\delta},$$

где a — ускорение электрона, A — безразмерная константа. Определите показатели степени: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

B. В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он должен двигаться не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведённой выше формуле, определите время Δt, за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR, при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $\dfrac{R_0}{2}$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int\limits_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right), \quad n \neq -1.$$

A) $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = -1, \delta = 2$; B) $\Delta t = \frac{2\pi c^3 \varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R$; $t_{1/2} = \frac{7}{12} \cdot \frac{\pi c^3 \varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4} \cdot R_0^3$

Задача 3. **Похоже на диод.** Две плоские металлические пластины площадью S располагаются параллельно друг другу в точках с координатами $x = 0$ (первая пластина) и $x = d$ (вторая пластина) при этом $S \gg d^2$. Ось OX перпендикулярна пластинам. Первая пластина заземлена, потенциал второй пластины равен $-U_0$. Пространство между пластинами заполнено полупроводником, в котором носителями заряда являются частицы с зарядом q ($q > 0$). Ток в полупроводнике — это коллективное, направленное движение этих частиц. Диэлектрическая проницаемость полупроводника равна единице. Электрическая постоянная равна ε_0.

A. При больших значениях U_0 движение носителей заряда определяется действием электрических сил и сил сопротивления. Можно считать, что средняя скорость движения носителей в направлении поля в точке с координатой x в пространстве между пластинами пропорциональна напряжённости в этой точке $v(x) = \mu E(x)$, где μ — известная константа.

Пусть ток между пластинами установился, средняя скорость носителей $v(x)$, плотность заряда $\rho(x)$ и потенциал $U(x)$ не меняются со временем. Предполагая, что потенциал зависит от координаты по степенному закону $U(x) = Ax^{\alpha}$, определите значения постоянных A и α. Найдите ток между пластинами. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d и S.

B. При небольших значениях U_0 движение носителей обусловлено диффузией. Сила тока в этом случае удовлетворяет соотношению

$$I = -S\left(\frac{\mu kT}{q}\right)\frac{d\rho}{dx},$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Пусть ток между пластинами установился. Предполагая степенную зависимость потенциала от координаты $U(x) = Bx^{\beta}$, определите значения постоянных B и β. Найдите силу тока. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d, q, T и S.

C. Какому сильному неравенству вида

$$U_0 \ll f(q, \mu, T)$$

должно удовлетворять значение потенциала U_0, чтобы его можно было считать небольшим, как в пункте B?

A) $\alpha = \frac{3}{2}$, $A = -\frac{U_0}{d^{\frac{3}{2}}}$, $I = \frac{9}{8} \cdot \frac{\mu\varepsilon_0 S U_0^2}{d^3}$; B) $\beta = 3$, $B = -\frac{U_0}{d^3}$, $I = -\frac{6\varepsilon_0 U_0 \mu kTS}{qd^3}$; C) $U_0 \ll \frac{kT}{q}$

Задача 4. **Термодинамика жидкости.** Коэффициент теплового расширения при постоянном давлении некоторой жидкости равен $\alpha = \dfrac{1}{V} \cdot \dfrac{\Delta V}{\Delta T} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$, сжимаемость этой жидкости при постоянной температуре равна $\beta = -\dfrac{1}{V} \cdot \dfrac{\Delta V}{\Delta P} = 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ Па$^{-1}$, а её молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна $c_V = 112$ Дж/(моль · К). Эти параметры можно считать постоянными в условиях данной задачи. Внутренняя энергия одного моля рассматриваемой жидкости является функцией двух переменных: молярного объёма V и температуры T и даётся формулой

$$U(V,T) = A_1 T + A_2 V + A_3 VT - pV,$$

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные константы, V — молярный объём, $p = p(V,T)$ — молярное давление, являющееся функцией тех же двух переменных V и T.

A. Считая молярный объём V функцией двух переменных: молярного давления p и температуры T, выразите малое изменение dV через малые изменения dp и dT, а также данные в условии постоянные.

B. Определите зависимость давления от температуры $p(T)$ в изохорном процессе, считая известным значение давления p_0 при температуре T_0. Ответ выразите через заданные в условии постоянные, а также параметры p_0 и T_0.

C. Найдите значения постоянных A_1 и A_3 в выражении для внутренней энергии. В этом пункте и в следующих получите числовые ответы.

D. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно, совершаемый с жидкостью, определите значение постоянной A_2 в выражении для внутренней энергии.

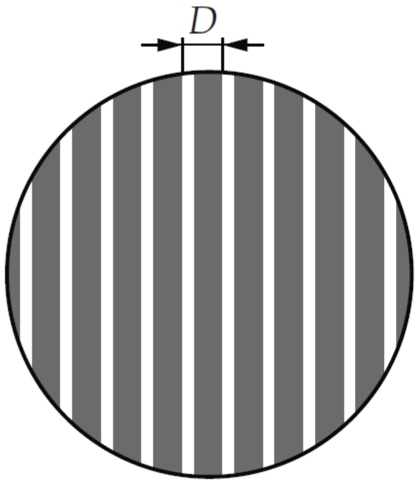
E. Для температуры $T_0 = 300$ К определите значение молярной теплоёмкости при постоянном давлении c_p, если молярный объём жидкости в рассматриваемом состоянии равен $V = 58$ см^3/моль.

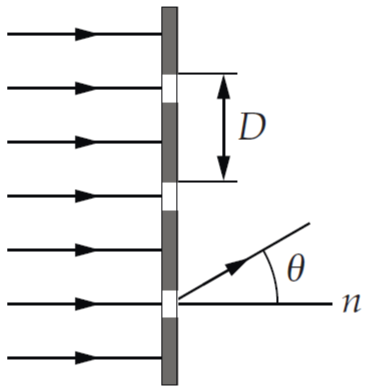
A) $dV = \alpha V dT - \beta V dp$; B) $p(T) = p_0 + \frac{\alpha}{\beta}(T - T_0)$;

C) $A_1 = c_V = 112$ Дж/(моль · К), $A_3 = \frac{\alpha}{\beta} \approx 6{,}8 \cdot 10^5$ $\frac{\text{Па}}{\text{К}}$; D) $A_2 = -\frac{1}{\beta} = -1{,}1 \cdot 10^9$ Па$^{-1}$;

E) $c_p = c_V + \frac{\alpha^2 T_0 V_0}{\beta}$

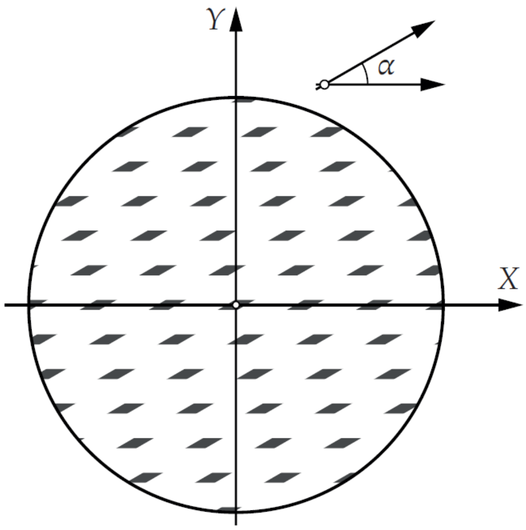
Задача 5. **Решётки.** Дифракционная решётка (см. рисунок слева) представляет собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h. В этой задаче мы рассматриваем решётки, содержащие $n = 100$ штрихов на миллиметр, считая при этом, что $h = 0{,}1D$. Во всех пунктах задачи решётка располагается параллельно экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, на расстоянии $L = 3$ м от него. Экраном считаем участок вертикальной стены высотой 1 м и шириной 2 м. Решётка освещается лучом лазерной указки диаметром $d = 2$ мм с длиной волны $\lambda = 532$ нм, падающим на решётку по нормали. Если бы решётки не было, луч попадал бы в центр экрана.





A. Пусть штрихи решётки ориентированы вертикально. При нормальном падении лазерного луча на решётку на экране наблюдается система ярких пятен. Сколько всего светлых пятен будет видно на экране? Чему будет равно расстояние между соседними пятнами вблизи центра экрана? Оцените поперечный размер центрального светлого пятна.

B. Пусть две дифракционные решётки накладываются друг на друга. Штрихи одной решётки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке ниже, тёмные параллелограммы символизируют прозрачные области.

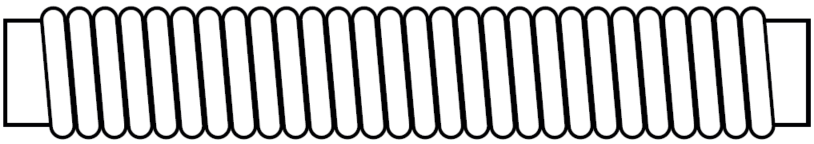


При освещении такой двумерной решётки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат YOX, направление осей OY и OX совпадает с направлением осей на рисунке, начало координат находится в центре экрана.

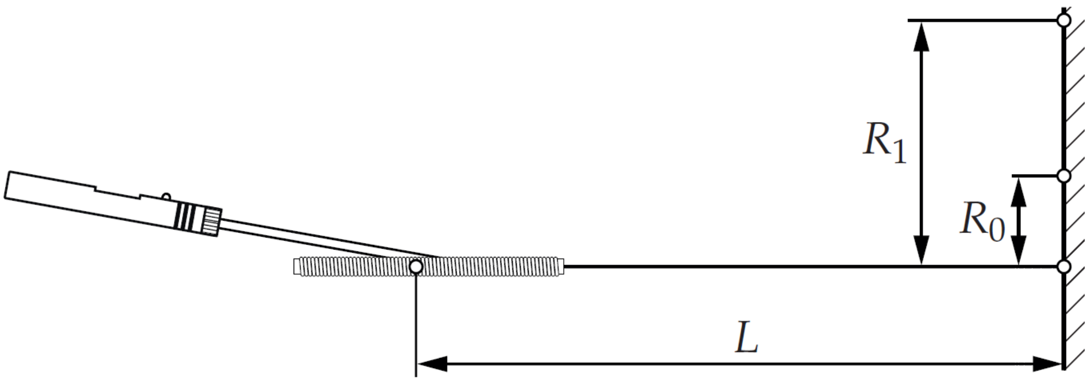
Пусть угол α равен $\dfrac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок, изобразите дифракционную картину. Укажите координаты светлых пятен на экране.

Укажите координаты светлых пятен для случая $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. Качественно опишите траекторию максимумов при увеличении угла α.

C. Гитарная струна с оплёткой представляет собой отражательную дифракционную решётку. Оплётка — это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны (см. рисунок).



При освещении горизонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (см. рисунок, представленный ниже), на вертикальном экране, находящемся в 2–3 метрах от струны, наблюдается дифракционная картина в виде концентрических полуокружностей. В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $R_0 = 4$ см, $R_1 = 12{,}5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру. Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах ($\lambda = 532$ нм). Определите по этим данным диаметр проволоки оплётки.



A) $\Delta x \approx \frac{L\lambda}{D} \approx 16$ см; 11 пятен;

B) для пересечения под прямым углом: $x = \frac{L\lambda}{D}n$, $y = \frac{L\lambda}{D}m$, где m и n — целые числа;

для пересечения под углом α: $x = \frac{n\lambda L}{D}\sin\alpha$, $y = -\frac{n\lambda L}{D}\cos\alpha + \frac{m\lambda L}{D}$; C) $D \approx 0{,}3$ мм