Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

11 класс, 2025 год

1. Пачка офисной бумаги в интернет-магазине стоит 630 руб., а при оплате за 15 или более пачек предусмотрен кешбэк в размере 10% от внесённой суммы. Как, имея изначально 20000 руб., приобрести максимально возможное количество таких пачек? Определите это количество.

$\boxed{35}$

2. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{\lg\left(x^2 - 1\right)}}.$$

$\boxed{x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup [2; +\infty)}$

3. Найдите все квадратные трёхчлены, максимальные значения каждого из которых на отрезках $[0;1]$, $[1;2]$ и $[2;3]$ равны 3, 6 и 8 соответственно.

$\boxed{-0{,}5x^2 + 4{,}5x - 1}$

4. Все вершины тетраэдра $ABCD$ равноудалены от точки O. Зная, что $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$, найдите радиус сферы, проходящей через O и через середины рёбер AB, BC и AC.

$\boxed{\frac{1}{8}\sqrt{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}$

5. Решите уравнение:

$$3^{-0{,}5} + 6^{-0{,}5+\log_6 \sin x} = 2^{-0{,}5+\log_2 \cos x}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = \angle CAD$ и $AB > AD$. Прямая, делящая его внешний угол при вершине A пополам, пересекает прямые BC, CD и BD в точках P, Q и R соответственно. Найдите длину отрезка AP, если $AQ = 3$, $AR = 18$.

$\boxed{4{,}5}$

7. Неизвестный 100-значный код составлен из цифр 1 и 2. За один шаг про любое натуральное число можно узнать, является ли оно фрагментом кода. (Фрагмент числа N — это любое число, образованное подряд идущими цифрами в записи N; например, $N = 1211$ имеет ровно восемь различных фрагментов: 1, 2, 12, 21, 11, 121, 211 и 1211.) Докажите, что за 120 шагов можно наверняка узнать этот код.

8. Отрезок длины 1 двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = ax^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите все возможные положительные значения параметра a.

$\boxed{\left(0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]}$