

Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

8–9 классы, 2024 год

1. Зайцы играли в прятки. Изначально три зайца искали всех остальных. Если зайца находят, то он сам начинает искать. Всех зайцев нашли, и они начали обсуждать свои успехи. Оказалось, что 99 зайцев никого не нашли, а остальные нашли по три зайца (одного зайца всегда находит ровно один другой заяц). Сколько всего было зайцев?

IV

2. В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время, кроме Гриши, в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

V

3. Разность кубов двух целых чисел равна простому числу p . Найдите их произведение.

$\frac{x}{1-a}$ или $1-$

4. В университете учатся 2023 студента, причём некоторые из них дружат друг с другом (все дружбы взаимны). Могло ли оказаться так, что любые два студента имеют ровно одного общего знакомого среди остальных студентов?

VI

5. Ненулевые числа a, b, c таковы, что

$$a^2 - b^2 - bc = 0 \quad \text{и} \quad b^2 - c^2 - ca = 0.$$

Докажите, что $a^2 - c^2 - ab = 0$.

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$

$$\angle DEA = \angle DAC = \angle CBA \quad \text{и} \quad \angle ADE = \angle ACB = 90^\circ.$$

Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной около треугольника ACD окружности.

7. Изначально на доске написано число 0. В первый день Волк прибавил число 2 к числу на доске, во второй день Волк еще прибавил $2 \cdot 3$ к уже написанному числу на доске и т. д. В k -ый день Волк прибавлял к числу на доске произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n -ого прибавления на доске оказалась написана степень двойки.

$$\boxed{2 = u \text{ и } 1 = u}$$

8. В каждой клетке таблицы 10×10 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k ? Связной фигурой будем называть такое множество клеток, что от каждой из них можно добраться до любой другой клетки этого множества, перемещаясь каждый раз только в соседнюю по стороне клетку этого множества.

$$\boxed{001 = 7}$$