

Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2024 год

1. В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

III

2. Найдите все такие пары натуральных чисел $(a; b)$, для которых

$$4\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = (a + b)^2 + 1.$$

(1:1)

3. Дана квадратная таблица 50×50 . В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 1250. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

4. В треугольнике ABC проведены биссектриса AA_1 и высота BB_1 . Доказать, что если $\angle AA_1B = 45^\circ$, то окружность, описанная около треугольника A_1B_1C , касается прямой AA_1 .

5. Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству:

$$f(x + y) = \sqrt{(f^2(x) + f^2(y))},$$

при этом $f(1) + f(4) = 9$. Найдите $f(2^{2023})$.

ε · εζοζ(ζ^)

6. Найдите a, b, c , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3, \\ (3a + 3b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

(9ε'9ε- '9ε-) '(6'6'0) '(6'0'6) '(0'0'0)

7. Дано 10 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 10 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на доске?

97

8. Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске 10×10 . Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Заяц