

Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

8–9 классы, 2021 год

1. Пчелы продают гречишный мёд и дикий мёд в одинаковых стеклянных банках. Цена дикого мёда вдвое больше цены гречишного мёда (без учета стоимости банки). Пчёлы могут взять пустые банки, обменяв их на мёд. Винни Пух принёс 20 пустых банок, зная, что этого хватит на несколько банок с мёдом. Сколько банок и с каким именно мёдом он может получить от пчёл, если стоимость 12 банок с гречишным мёдом равна стоимости 7 банок с диким мёдом?

2. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $\angle KCL \leq \frac{1}{2}\angle ACB$. Докажите, что $KL \leq \frac{1}{2}AB$.

3. Незнайка предложил складывать дроби по такому правилу:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc + ad}.$$

Существуют ли ненулевые дроби, для которых сложение по правилу Незнайки даёт верный результат как при обычном сложении?

4. Можно ли число 2873 представить в виде суммы нескольких различных факториалов?

5. Произведение двух различных целых чисел a и b является квадратом натурального числа. Существует ли такое целое число x , что $n = \frac{(a-x)(b-x)}{a-b}$?

6. Вася решал пример на доске в классе. Пока он стирал с доски, он случайно стёр две цифры из условия. Оставшийся на доске текст такой: $117 \cdot (24 + x) = 20**21$, где символ * означает стёртую цифру. Покажите, что Вася, тем не менее, может решить этот пример, зная, что x — целое число.

7. Три окружности с центрами в точках A , B и C и радиусами 7, 5 и 4 соответственно касаются друг друга внешним образом в точках D , E и F . Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания D , E и F .

8. На дне рождения Пети проводится лотерея с определенным количеством призов, причем каждый гость может получить не более одного приза. Известно, что если бы было на один приз меньше, чем в действительности, то количество всех возможных комбинаций распределения призов среди гостей было бы на 50% меньше. А если бы было на один приз больше, чем в действительности, то количество различных комбинаций распределения выигрышей среди гостей увеличилось бы на 50%. Сколько гостей пришло поздравить Петю и скольким из них повезет в лотерею?